

Σύστημα MIM/m/∞

Με παρόμοιο σκεπτικό όπως αυτό για το MIM/m/1
προκύπτει ότι είναι ειδική περίπτωση της διαδικασίας
γεννήσεων-θανάτων.

$$\lambda_n = \lambda$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & n < m \\ m\mu & m \leq n \end{cases}$$

$$P_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \dots \mu_n} P_0 \quad n=1,2,\dots$$

$$P_n = \begin{cases} \frac{\lambda \dots \lambda}{1\mu \dots n\mu} P_0 & n < m \\ \frac{\lambda \dots \lambda}{1\mu \dots m\mu \dots m\mu} P_0 & m \leq n \end{cases}$$

αν $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ και $\rho = \frac{\rho}{m}$

→

$$P_n = \begin{cases} \frac{\lambda^n}{n! \mu^n} P_0 = \frac{\rho^n}{n!} P_0, & n < m \\ \frac{\lambda^n}{m! m^{n-m} \mu^n} P_0 = \frac{m^m}{m!} \rho^n P_0, & m \leq n \end{cases}$$

Προσδιορισμός του P_0 .

$$\text{Ισχύει } \sum_{n=0}^{+\infty} P_n = 1$$

$$\text{Άρα } P_0 \left[\sum_{n=0}^{m-1} \frac{\tau^n}{n!} + \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{m! m^{n-m} \mu^n} \right] = 1$$

Θέτω $n-m=j$

$$1 = P_0 \left[\sum_{n=0}^{m-1} \frac{\tau^n}{n!} + \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{m+j}}{m! m^j \mu^{m+j}} \right]$$

$$1 = P_0 \left[\sum_{n=0}^{m-1} \frac{\tau^n}{n!} + \frac{\lambda^m}{m! \mu^m} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{\lambda}{m\mu} \right)^j \right]$$

$$\text{Όταν } \frac{\lambda}{m\mu} = \rho < 1 \text{ τότε } 1 = P_0 \left[\sum_{n=0}^{m-1} \frac{\tau^n}{n!} + \frac{\tau^m}{m!} \frac{1}{1-\rho} \right]$$

$$\text{Άρα } P_0 = \left[\sum_{n=0}^{m-1} \frac{\tau^n}{n!} + \frac{\tau^m}{m! (1-\rho)} \right]^{-1}, \quad \rho = \frac{\lambda}{m\mu} < 1$$

Και έτσι προσδιορίζονται όλες οι πιθανότητες

σε κατάσταση στατιστικής ισορροπίας.

Μέσος αριθμός πελατών στην ουρά σε κατάσταση στατικής ισορροπίας.

Έστω Z η τ.μ. που παριστάνει τον αριθμό των πελατών στην ουρά σε κατάσταση στατικής ισορροπίας.

Δυνατές τιμές της τ.μ Z : $0, 1, 2, 3, \dots$ με αντίστοιχες πιθανότητες

$$p_0', p_1', p_2', \dots$$

Πρέπει να προσδιοριστούν αυτές οι πιθανότητες. Με παρόμοιο σκεπτικό με το M/M/1K είναι:

$$p_0' = p_0 + p_1 + \dots + p_m$$

$$p_1' = p_{m+1}$$

$$p_2' = p_{m+2}$$

$$\text{Άρα } L_q = E Z = \sum_{n=0}^{+\infty} n p_n' \Rightarrow L_q = 0 (p_0 + \dots + p_m) + 1 p_{m+1} + 2 p_{m+2} + \dots$$

$$\Rightarrow L_q = \sum_{n=m+1}^{+\infty} (n-m) p_n$$

Υπενθύμιση Για $n \geq m$

$$p_n = \frac{\lambda^n}{m! m^{n-m} \mu^n} p_0 = \frac{m^m}{m!} \rho^n p_0$$

$$\text{Τότε } L_q = \sum_{n=m+1}^{+\infty} (n-m) \frac{\lambda^n}{m! m^{n-m} \mu^n} p_0 \quad \text{Θέτω } n-m=j \text{ οπότε είναι:}$$

$$L_q = \sum_{j=1}^{+\infty} j \frac{\lambda^{m+j}}{m! m^j \mu^{m+j}} p_0$$

$$L_q = \frac{\lambda^m}{m! \mu^m} p_0 \sum_{j=1}^{+\infty} j \frac{\lambda^j}{m^j \mu^j}$$

$$L_q = \frac{\lambda^m}{m! \mu^m} p_0 \sum_{j=1}^{+\infty} j \rho^j$$

Υπενθύμιση $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = (1-x)^{-1}, \quad x < 1$

και

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n-1} = (1-x)^{-2}$$

Άρα για $\rho < 1$

$$L_q = \frac{\lambda^m}{m! \mu^m} P_0 \rho \sum_{j=1}^{+\infty} e^{j-1}$$

$$L_q = P_0 \frac{\lambda^m}{m! \mu^m} \frac{\lambda}{m \mu} \frac{1}{(1-\rho)^2}$$

$$L_q = P_0 \frac{\lambda^{m+1}}{m m! \mu^{m+1}} \frac{1}{(1-\rho)^2}$$

Άρα $L_q = P_0 \frac{\lambda^{m+1}}{m m!} \frac{1}{(1-\rho)^2}, \quad \rho < 1$ και P_0 έχει προσδιοριστεί.

Μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά στατικής ισορροπίας

Ισχύει: Μέσος αριθμός πελατών στην ουρά = $\frac{\text{Μέσος ρυθμός αφίξεων}}{\text{Μέσος ρυθμός εξυπηρέτησης}}$ · Μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά

$$L_q = \lambda \cdot EW_q$$

$$EW_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$\lambda P_0 + \lambda P_1 + \dots + \lambda P_6 + 0 P_7$$

$\lambda(1-P_7)$

M/M/3/7

(nx)

□ □ □
x x x x

Μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα = Μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά + Μέσος χρόνος εξυπηρέτησης

$$EW = EW_q + \frac{1}{\mu}$$

Άρα $EW = EW_0 + \frac{1}{\mu}$

οπότε και

$$L = EW \cdot \lambda$$

μεσος αριθμος πελατων στο συστημα.

Σύστημα M/M/m/m

Το σύστημα αυτό αποτελεί μοντελοποίηση ενός τηλεφωνικού κέντρου με m κανάλια εξυπηρέτησης (m γραμμές)

Όταν ένας συνδρομητής βρίσκει όλες τις γραμμές "κλειστές-γεμάτες" χάνεται. (Δεν υπάρχει χρόνος αναμονής)

Πρόκειται για διαδικασία γεννήσεων-θανάτων όπου.

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & n < m \\ 0 & n = m \end{cases}$$

→ όταν είναι ήδη n γραμμές ($n=m$) και δεν μπορεί να έρθει άλλη

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & n \leq m \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Για την διαδικασία γεννήσεων-θανάτων ισχύει:

$$P_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \dots \mu_n} P_0 \quad n=1, 2, \dots, m$$

Είναι τότε: $P_n = \frac{\lambda \dots \lambda}{1\mu \dots n\mu} P_0 \Rightarrow P_n = \frac{\lambda^n}{n! \mu^n} P_0 \Rightarrow \boxed{P_n = \frac{\tau^n}{n!} P_0} \quad n \leq m$

Προσδιορίζω το P_0 χρησιμοποιώντας ότι:

$$\sum_{n=0}^m \frac{\tau^n}{n!} P_0 = 1 \Rightarrow P_0 = \left(\sum_{n=0}^m \frac{\tau^n}{n!} \right)^{-1}$$

Σύστημα MIM/∞/∞

Θεωρείς τώρα ένα σύστημα εξυπηρέτησης στο οποίο για κάθε πελάτη που έρχεται υπάρχει πάντα ένας υπάλληλος, ελεύθερος

να τον εξυπηρετήσει. Δεν υπάρχει επόμενος ουρά.

Μπορεί να μη φαίνεται ρεαλιστικό αλλά είναι πολύ χρήσιμο ως μέτρο σύγκρισης.

Έστω $J(t)$ ο αριθμός πελατών στο σύστημα τη χρονική στιγμή t .

$$P_n(t) = P[J(t) = n / J(0) = 0]$$

$$\text{Άρα } P_0(0) = 1 \quad P_j(0) = 0 \quad \forall j \neq 0$$

Πρόκειται για διαδικασία γεννήσεων-θανάτων με:

$$\lambda_n = \lambda \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\mu_n = n\mu \quad n = 1, 2, \dots$$

Εφαρμόζοντας τη γενική σχέση της διαδικασίας γεννήσεων-θανάτων

$$\text{έχουμε: } \frac{dP_0(t)}{dt} + \lambda_0 P_0(t) = \mu_1 P_1(t) \Rightarrow \boxed{\frac{dP_0(t)}{dt} + \lambda P_0(t) = \mu P_1(t)}$$

$$\text{και } \frac{dP_n(t)}{dt} + (\lambda + \mu_n) P_n(t) = \lambda P_{n-1}(t) + \mu_{n+1} P_{n+1}(t) \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{dP_n(t)}{dt} + (\lambda + n\mu) P_n(t) = \lambda P_{n-1}(t) + (n+1)\mu P_{n+1}(t) \quad n = 1, 2, \dots}$$

$$Z^0 \frac{dP_0(t)}{dt} + \lambda P_0(t) = \mu P_1(t)$$

$$Z^1 \frac{dP_1(t)}{dt} + (\lambda + \mu) P_1(t) = 2\mu P_2(t) + \lambda P_0(t)$$

$$Z^2 \frac{dP_2(t)}{dt} + (\lambda + 2\mu) P_2(t) = 3\mu P_3(t) + \lambda P_1(t)$$

$$Z^n \frac{dP_n(t)}{dt} + (\lambda + n\mu) P_n(t) = (n+1)\mu P_{n+1}(t) + \lambda P_{n-1}(t)$$

Μέθοδος γεννήτριας

Πολλίω με $z^0, z^1, \dots, z^n$

και ορίσω $P(t, z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n P_n(t) \quad |z| < 1$

$$\frac{dP(t, z)}{dt} + \lambda [z^0 P_0(t) + \dots + z^n P_n(t) + \dots] + \mu [z^0 P_1(t) + 2z^1 P_2(t) + 3z^2 P_3(t) + \dots]$$

$$z^1 P_1(t) + 2z^2 P_2(t) + \dots = z [P_1(t) + 2z P_2(t) + \dots] = \frac{\partial P(t, z)}{\partial z}$$

$$+ \lambda z [P_0(t) + z^1 P_1(t) + \dots]$$

$$\Rightarrow \frac{dP(t, z)}{dt} + \lambda \underbrace{P(t, z)} + \mu z [P_1(t) + 2z P_2(t) + \dots] = \mu [P_1(t) + 2z P_2(t) + \dots] + \lambda z P(t, z)$$

όπως $P(t, z) = z^0 P_0(t) + z^1 P_1(t) + z^2 P_2(t) + \dots$

$$\frac{\partial P(t, z)}{\partial z} = P_1(t) + 2z P_2(t) + \dots$$

$$\text{Άρα } \frac{dP(t, z)}{dt} + \lambda P(t, z) + \mu z \frac{d}{dz} P(t, z) = \mu \frac{d}{dz} P(t, z) + \lambda z P(t, z)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{dP(t, z)}{dt} + \mu(z-1) \frac{d}{dz} P(t, z) = \lambda(z-1) P(t, z)}$$

Αρχική συνθήκη: $P(t, z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n P_n(t)$

$P_0(0) = 1$
 $P_n(0) = 0, n \neq 0$

$$P(0, z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n P_n(0)$$

όπως $P_0(0) = 1 \quad P_j(0) = 0 \quad j \neq 0$

$$\text{Άρα } P(0, z) = P_0(0) = 1$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

$$\text{Λύση της } \alpha(x,y) \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \beta(x,y) \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \gamma(x,y) f(x,y).$$

Βασιστικό σύστημα δύο δ.ε

$$\frac{dx}{\alpha(x,y)} = \frac{dy}{\beta(x,y)} = \frac{df}{\gamma(x,y)f}$$

$$(1) \frac{dx}{\alpha(x,y)} = \frac{dy}{\beta(x,y)} \Rightarrow u = A(x,y)$$

$$(2) \frac{dx}{\beta(x,y)} = \frac{df}{\gamma(x,y)f} \Rightarrow v = B(f, x, y)$$

$$\text{Τότε } v = F(u) \quad (\Leftrightarrow B(f(x,y)) = F(A(x,y)) \text{ αρχικές})$$

$$\text{Εδώ είναι: } \frac{dt}{1} = \frac{dz}{\mu(z-1)} = \frac{dp}{\lambda(z-1)p}$$

$$\text{Είναι: } \frac{dt}{1} = \frac{dz}{\mu(z-1)} \Rightarrow \mu dt = \frac{1}{z-1} dz \Rightarrow \mu t = \ln(z-1) \Rightarrow z-1 = e^{\mu t}$$

$$\text{Άρα } \boxed{U = (z-1) e^{-\mu t}}$$

$$\text{Τότε } \frac{dz}{\mu(z-1)} = \frac{dp}{\lambda(z-1)p} \Rightarrow \frac{\lambda}{\mu} dz = \frac{dp}{p} \Rightarrow \frac{dp}{p} = e^{\frac{\lambda}{\mu} dz} \Rightarrow$$

$$P(t, z) = V e^{pz} \Rightarrow V = P(t, z) e^{-pz}$$

$$\text{Ομως τότε } V = F(u) \Rightarrow P(t, z) e^{-\frac{\lambda}{\mu} z} = F((z-1) e^{-\mu t})$$

$$\xrightarrow{\text{για } t=0} P(0, z) e^{-\frac{\lambda}{\mu} z} = F(z-1) \Rightarrow F(z-1) = e^{-(\lambda/\mu)z} \Rightarrow$$

$$\boxed{F(z) = e^{-\frac{\lambda}{\mu}(z+1)}}$$

Επομένως

$$P(t, z) = e^{\frac{\lambda}{\mu} z} F((z-1)e^{-\mu t}) \Rightarrow$$

$$P(t, z) = e^{\frac{\lambda}{\mu} z} e^{-\frac{\lambda}{\mu} [(z-1)e^{-\mu t} + 1]} \\ = e^{\frac{\lambda}{\mu} z} e^{-\frac{\lambda}{\mu} z e^{-\mu t}}$$

$$e^x = \sum \frac{x^n}{n!}$$

$$P(t, z) = e^{-\frac{\lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu t})} \\ = e^{\frac{\lambda}{\mu} z (1 - e^{-\mu t})}$$

$$P(t, z) = e^{-\frac{\lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu t})} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} z^n$$

$$\text{όπου } X = \frac{\lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu t})$$

Υπενθύμιση $P(t, z) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(t) z^n$

$$\text{'Αρα } P_n(t) = e^{-\frac{\lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu t})} \frac{x^n}{n!} \quad \text{όπου } X = \frac{\lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu t})$$

$$\text{δηλ. } P_n(t) = e^{-\frac{\lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu t})} \frac{\lambda^n}{\mu^n} \frac{(1 - e^{-\mu t})^n}{n!}$$

$$\text{Επιπρόσθετα έστω } P_n = \lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t)$$

$$\text{Τότε: } P_n = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[e^{-\frac{\lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu t})} \frac{\lambda^n}{\mu^n} \frac{(1 - e^{-\mu t})^n}{n!} \right]$$

δηλαδή:

$$P_n = e^{-\frac{\lambda}{\mu}} \frac{\lambda^n}{\mu^n n!} = \frac{\rho^n e^{-\rho}}{n!}$$

2ος Τρόπος εύρεσης πιθανοτήτων σε στατική ισορροπία.

2-τη διαδικασία γεννήσεων-θανάτων

$$P_n = \frac{\lambda_0 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \dots \mu_n} P_0$$

Εδώ $\lambda_n = \lambda$, $\mu_n = n \cdot \mu$.

Άρα $P_n = \frac{\lambda^n}{n! \mu^n} P_0$ με $\sum_{n=0}^{+\infty} P_n = 1$

Άρα $P_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{\mu^n n!} = 1 \xrightarrow{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x}$

$P_0 e^{\lambda/\mu} = 1 \Rightarrow \boxed{P_0 = e^{-\lambda/\mu}}$

και $\boxed{P_n = \frac{\lambda^n}{\mu^n n!} e^{-\lambda/\mu}}$

Μέσος χρόνος αναμονής: Αφού έχουμε ∞ υπαλλήλους



μέσος χρόνος αναμονής $\equiv$ μέσο χρόνο εξυπηρέτησης



$\frac{1}{\mu}$

Μέσος αριθμός πελατών: Έστω Z τ.μ αριθμός πελατών στο σύστημα ...

$$L = \sum_{n=0}^{+\infty} n P_n \Rightarrow L = \sum_{n=0}^{+\infty} n \frac{\rho^n}{n!} e^{-\rho}$$

αφού $P_n = \frac{\rho^n e^{-\rho}}{n!} = \frac{\lambda^n}{\mu^n n!} e^{-\lambda/\mu}$

Είναι $L = e^{-\rho} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\rho^n}{(n-1)!}$ (για $n=0$ δίνει $\dots$)

Θυμίζω ότι $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$

Άρα $L = e^{-\rho} \rho \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!} \xrightarrow{n-1=j} e^{-\rho} \rho \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\rho^j}{j!}$

$= e^{-\rho} \rho \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\rho^n}{n!} = \rho = \frac{\lambda}{\mu}$

- ① Σε ένα αεροδρόμιο με ένα διαδρόμο τα αεροσκάφη ζητούν άδεια προσχειώσης με κατανομή Poisson με μέσο όρο 1 αεροσκάφος κάθε 5 λεπτά.

Όποιο αεροσκάφος φτάσει πρώτο προσχειώνεται πρώτο ενώ εκείνα που δεν μπορούν να προσχειωθούν αμέσως περιμένουν να προσχειωθούν.

Ο χρόνος που απαιτείται από τον εναέριο ελεγκτή για την προσχειώση του αεροσκάφους, ακολουθεί εκθετική με μέσο χρόνο 3 λεπτά. Να προσδιοριστεί:

- (α) ο μέσος αριθμός πελατών που ζήτησαν άδεια προσχειώσης.
(β) ο μέσος αριθμός αεροσκαφών που ζήτησαν άδεια προσχειώσης και βρίσκονται ακόμη σε αναμονή.
(γ) η πιθανότητα ότι ένα αεροσκάφος που φτάνει θα προσχειωθεί σε λιγότερο από 10 λεπτά από την πρώτη αίτησή του για άδεια προσχειώσης
(δ) η πιθανότητα να υπάρχουν περισσότερα από 3 αεροσκάφη σε αναμονή.

ΛΥΣΗ

Έχουμε M/M/1/∞ σύστημα.

Οι πελάτες έρχονται στο σύστημα σύμφωνα με την κατανομή Poisson.

1 αεροσκάφος ανά 5 λεπτά.

λ ανά 1 λεπτό

$$\lambda = \frac{1}{5}$$

Άρα $\lambda = \frac{1}{5}$ λεπτά

Ο χρόνος εξυπηρέτησης ακολουθεί εκθετική με μέσο χρόνο 3 λεπτά

$$\frac{1}{\mu} = 3 \Rightarrow \mu = \frac{1}{3}$$

α) Μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα.

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{5} < 1 \quad \text{ζ.Ι.}$$

Απόδειξη $P_n = (1-\rho)\rho^n \quad n \geq 1$

των: $P_0 = (1-\rho)$

Απόδειξη του $L = \sum_{n=0}^{+\infty} n P_n = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{3/5}{1-3/5} = \frac{3}{2}$

(β) Μέσος αριθμός πελατών στην ουρά.

$$\begin{aligned} L_q &= \sum_{n=1}^{+\infty} n P_{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n (1-\rho) \rho^{n+1} = (1-\rho) \rho^n \sum_{n=1}^{\infty} n \rho^{n-1} \\ &= (1-\rho) \rho^n (1-\rho)^{-2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} \quad \rho < 1$$

$$\Rightarrow L_q = \frac{9/25}{1-3/5} = \frac{9/25}{2/5} = \frac{9 \cdot 5}{2 \cdot 25} = \frac{9}{2 \cdot 5} = \frac{9}{10} = 0,9.$$

(γ) $P(W \leq 10) = ?$ W τ.μ. που παριστάνει το χρόνο αναμονής του τυχαίου πελάτη σε ζ.Ι στο σύστημα.

$$\begin{aligned} f_W(w) &= \mu(1-\rho) e^{-\mu(1-\rho)w} \\ &= \frac{1}{3} \frac{2}{5} e^{-\frac{2}{15}w}, \quad w > 0. \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Άρα } P(W \leq 10) = \int_0^{10} \frac{2}{15} e^{-\frac{2}{15}w} dw. \end{array} \right.$$

$$(δ) \quad P \left[\begin{array}{c} \text{να υπάρχουν περισσότεροι από 3} \\ \text{πελάτες στην ανάμνηση} \end{array} \right] = P \left[\begin{array}{c} 4 \text{ ή περισσότεροι} \\ \text{πελάτες στο σύστημα} \end{array} \right]$$

$$= 1 - P \left(\begin{array}{c} \text{αριθμός πελατών} \\ \text{στο σύστημα} \leq 3 \end{array} \right)$$

$$= 1 - (P_0 + P_1 + P_2 + P_3)$$

$$\begin{array}{l} \text{όπου } P_n = (1-\rho)\rho^n, \quad n \geq 1 \\ P_0 = (1-\rho) \quad \mu\epsilon \quad \rho = \frac{3}{5} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} P_n = (1-\rho)\rho^n \\ P_0 = (1-\rho) \end{array}} \right\} \text{Θέλουν απόδειξη.}$$

② Μια μικρή τράπεζα έχει δύο ταμίες που είναι εξίσου αποδοτικοί και μπορούν να χειριστούν κατά μέσο όρο 60 συναλλαγές πελατών ανά ώρα. Ο καθένας, ενώ οι χρόνοι εξυπηρέτησης ακολουθούν εκθετική κατανομή.

Οι πελάτες έρχονται στην τράπεζα σύμφωνα με την κατανομή Poisson με μέσο ρυθμό 100 την ώρα.

Προσδιορίστε: (α) πιθανότητα να υπάρχουν περισσότεροι από 3 πελάτες στην τράπεζα

(β) πιθανότητα να είναι αδρανής κάποιος ταμίας.

ΛΥΣΗ

Έχουμε $M/M/2/\infty$

Οι πελάτες καταφθάνουν στο σύστημα εξυπηρέτησης με Poisson κατανομή με μέσο ρυθμό 100/ώρα.

$$\lambda = 100$$

Χρόνος εξυπηρέτησης ακολουθεί εκθετική κατανομή

$$\mu = 60$$

Γενικά στο σύστημα $M/M/m/\infty$ έχουμε ότι σε κατ/ση 2.1.

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu m} = \frac{100}{2 \cdot 60} = \frac{5}{6} < 1$$

Απόδειξη του $P_n = \begin{cases} \frac{\tau^n}{n!} P_0, & n < m \\ \frac{\tau^n}{m! m^{n-m}} P_0, & n \geq m \end{cases}$ με $\tau = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{100}{60} = \frac{5}{3}$.

$$P_0 = \left[\sum_{i=0}^{m-1} \frac{\tau^i}{i!} + \frac{\tau^m}{m!} \frac{1}{1-\rho} \right]^{-1}, \rho < 1.$$

$$(α) \quad P[\text{να υπάρχουν περισσότεροι από 3 πελάτες στην τράπεζα}] = \sum_{n=4}^{+\infty} P_n$$

$$\Rightarrow P[\dots] = 1 - (P_0 + P_1 + P_2 + P_3) = \dots = 0.5261$$

$$(β). \quad P[\text{να είναι αυθαιρέτως κοινοίος πελάτης}] = P_0 + \frac{1}{2} P_1 = \dots = 0.1667.$$

Υπάρχει κανένας πελάτης στο σύστημα
ή

ένας πελάτης

③ Σε ένα αγροτικό δρόμο υπάρχει ένος σταθμός εξυπηρέτησης με μόνο μια αντλία παροχής βενζίνης.

Τα αυτοκίνητα προέρχονται στο σταθμό για βενζίνη σύμφωνα με την κατανομή Poisson με μέσο ρυθμό 10 την ώρα.

Ο χρόνος που απαιτείται για την εξυπηρέτηση ενός αυτοκινήτου ακολουθεί εκθετική με μέσο όρο τα 2 λεπτά.

Ο σταθμός μπορεί να υποδεχθεί 4 αυτοκίνητα το πολύ ενώ οι τοπικοί κανόνες οδικής κυκλοφορίας απαγορεύουν στα αυτοκίνητα να περιμένουν στο δρόμο.

Προσδιορίστε: (α) Το μέσο αριθμό αυτοκινήτων που βρίσκονται ταυτόχρονα στο σταθμό.

(β) το μέσο χρόνο που πρέπει να περιμένει ένας πελάτης για να εξυπηρευτεί, μόλις καταφέρει να εισέλθει στο σταθμό.

(γ) το μέσο ρυθμό απώλειας κέρδους από πελάτες που απευθύνονται αλλού όταν ο σταθμός γεμάτος αν οι μέσες πωλήσεις είναι 15€

ΛΥΣΗ

Έχουμε M/M/1/4 σύστημα.

Οι αφίξεις ακολουθούν Poisson με $\lambda = 10$

Ο χρόνος εξυπηρέτησης λέει ότι έχει μέσο όρο 2 λεπτά

την ώρα $\Rightarrow \frac{60}{2} = 30$ πελάτες την ώρα.

Άρα $E_k(\mu = 30)$.

Γενικά $M/M/m/k$.
(με $m=1$ και $k=4$)

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda=10 & n < k \\ 0 & n \geq k \end{cases} \quad \mu_n = \begin{cases} n\mu & n < m \\ m\mu & m \leq n \leq k. \end{cases} \quad \mu_n = 30$$

↓ θέλουν απόδειξη.

$$P_n = \begin{cases} \frac{\tau^n}{n!} P_0, & n < m \\ \frac{\tau^n}{m! m^{n-m}} P_0 & k \geq n \geq m \end{cases} \quad \text{όπου } \tau = \frac{\lambda}{\mu}$$

και

$$P_0 = \begin{cases} \left[\sum_{i=0}^{m-1} \frac{\tau^i}{i!} + \frac{\tau^m}{m!} \frac{1-\rho^{k-m+1}}{1-\rho} \right]^{-1}, & \rho = \frac{\lambda}{m\mu} \neq 1 \\ \left[\sum_{i=0}^{m-1} \frac{\tau^i}{i!} + \frac{\tau^m}{m!} (k-m+1) \right]^{-1}, & \rho = \frac{\lambda}{m\mu} = 1. \end{cases}$$

$$\text{Εδώ } \rho = \frac{10}{1 \cdot 30} = \frac{1}{3}$$

(α) Μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα.

$$L = \sum_{n=0}^k n P_n, \quad k=4 \quad m=1 \Rightarrow L = 0.4793.$$

Από θεωρία

$$L = \left[\sum_{n=1}^{m-1} \frac{\tau^n}{(n-1)!} + \frac{\tau^m}{m!} \sum_{n=m}^k n \rho^n \right] P_0$$

(β) Μέσος χρόνος εξυπηρέτησης πελάτη.

$$E_w = \frac{L}{\lambda(1-p_4)} = \dots$$

$$\begin{array}{l} \text{ΜΕΣΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ} \\ \text{ΠΕΛΑΤΩΝ} \\ \text{ΣΥΣΤΗΜΑ} \end{array} = \begin{array}{l} \text{ΜΕΣΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ} \\ \text{ΑΦΙΞΕΩΝ} \end{array} * \begin{array}{l} \text{ΜΕΣΟΣ ΧΡΟΝΟΣ} \\ \text{ΑΝΑΜΟΝΗΣ} \end{array}$$

$$L = ? * E_w$$

$$\begin{array}{l} \text{ΜΕΣΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ} \\ \text{ΑΦΙΞΕΩΝ} \end{array} = \lambda p_0 + \lambda p_1 + \lambda p_2 + \lambda p_3$$
$$= \lambda (p_0 + p_1 + p_2 + p_3)$$
$$= \lambda (1 - p_4)$$

(γ) Μέσος ρυθμός απώλειας κέρδους = Μέσος αριθμός
αφίξεων ενώ * 15
δεν μπορούν να
εισέλθουν
στο σύστημα

$$= \lambda \cdot p_4 * 15$$

ρυθμός
απώλειας